अध्याय 13

साँख्यिकी और प्रायिकता

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

साँख्यिकी

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक

(a) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

(i) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, यह कल्पना की जाती है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित होती है।

(ii) **प्रत्यक्ष या सीधी विधि**

माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{f_i x_i}{f_i}$, जहाँ x_i (वर्ग चिह्न) i वें वर्ग अंतराल का मध्य-बिंदु है तथा f_i उसकी संगत बारंबारता है।

(iii) **कल्पित माध्य विधि**

माध्य $(\bar{x}) = a + \dfrac{f_i d_i}{f_i}$, जहाँ a कल्पित माध्य है और प्रत्येक i के लिए $d_i = x_i - a$, a से x_i के विचलन हैं।

(iv) **पग विचलन विधि**

माध्य ($\overline{x}$) = $a+h\ \dfrac{f_iu_i}{f_i}$, जहाँ a कल्पित माध्य है, h वर्ग माप है तथा

$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ है।

(v) यदि वर्ग माप (साइज़) असमान हों, तब भी (iv) में दिया सूत्र प्रयोग किया जा सकता है। इसके लिए, h को सभी d_i का एक उपयुक्त विभाजक लेना होगा।

(b) वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

(i) एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में, बारंबारताओं को केवल देखकर बहुलक को निर्धारित करना संभव नहीं होता। वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए, अधिकतम बारंबारता वाला वर्ग ज्ञात कीजिए। यह वर्ग *बहुलक वर्ग* कहलाता है। आँकड़ों का बहुलक एक ऐसा मान है जो इस बहुलक वर्ग में है।

(ii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए, वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक परिकलित किया जा सकता है:

बहुलक = $l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$,

जहाँ l बहुलक वर्ग की निम्न सीमा है, h वर्ग साइज (या माप) है, f_1 बहुलक वर्ग की बारंबारता है तथा f_0 और f_2 क्रमशः बहुलक वर्ग से पहले और बाद वाले वर्गों की बारंबारताएँ हैं।

(c) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

(i) संचयी बारंबारता सारणी – वर्गीकृत बारंबारता बंटन की 'से कम प्रकार की' और 'से अधिक प्रकार की'

(ii) यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या n है, तो उस वर्ग को ज्ञात कीजिए जिसकी संचयी बारंबारता $\dfrac{n}{2}$ से बड़ी (और उसके निकटतम) है। यह वर्ग *माध्यक वर्ग* कहलाता है।

(iii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक परिकलित किया जा सकता है :

माध्यक = $l + \left(\dfrac{\dfrac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) h$,

जहाँ l माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, n प्रेक्षणों की संख्या, h वर्ग साइज, cf माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता है तथा f माध्यक वर्ग की बारंबारता है।

(d) संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण (तोरण) – से कम प्रकार और से अधिक प्रकार

(i) वर्गीकृत आँकड़ों के संचयी बारंबारता बंटन (से कम प्रकार) के आलेख से माध्यक ज्ञात करना।

(ii) संचयी बारंबारता बंटनों (से कम प्रकार और से अधिक प्रकार) के आलेखों से, इन आलेखों के प्रतिच्छेद बिंदु के भुज के रूप में माध्यक ज्ञात करना।

प्रायिकता

- यादृच्छिक प्रयोग, किसी प्रयोग के परिणाम, घटनाएँ, प्रारंभिक घटनाएँ।
- समप्रायिक परिणाम
- किसी घटना E की सैद्धांतिक (या चिरप्रतिष्ठित) प्रायिकता [P(E) द्वारा व्यक्त या निरूपित] निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी परिणामों की संख्या}},$$

जहाँ प्रयोग के परिणाम *समप्रायिक* हैं।

- किसी घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में कोई भी संख्या हो सकती है। कुछ विशेष स्थितियों में यह 0 या 1 भी हो सकती है।
- किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की बारंबारताओं का योग 1 होता है।
- किसी घटना $\overline{E}$ के लिए , $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ होता है,

जहाँ $\overline{E}$ का अर्थ 'E नहीं' है। $\overline{E}$, घटना E का पूरक कहलाती है।

- असंभव घटना, निश्चित घटना

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : संचयी बारंबारता सारणी की रचना करना निम्नलिखित में उपयोगी होता है

(A) माध्य (B) माध्यक

(C) बहुलक (D) उपरोक्त सभी तीनों मापक

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : इस सारणी को देखिए :

मासिक आय परिसर	परिवारों की संख्या
10000 रु से अधिक	100
13000 रु से अधिक	85
16000 रु से अधिक	69
19000 रु से अधिक	50
22000 रु से अधिक	33
25000 रु से अधिक	15

उपरोक्त सारणी में, आय परिसर (रु में) 16000 – 19000 के परिवारों की संख्या है

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 19

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी कक्षा के 60 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के निम्नलिखित बारंबारता बंटन पर विचार कीजिए:

ऊँचाई (cm में)	विद्यार्थियों की संख्या
150-155	15
155-160	13
160-165	10
165-170	8
170-175	9
175-180	5

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा और माध्यक वर्ग की उपरि सीमा का योग है

(A) 310 (B) 315 (C) 320 (D) 330

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : निम्नलिखित में से कौन किसी घटना की प्रायिकता हो सकती है?

(A) – 0.04 (B) 1.004 (C) $\frac{18}{23}$ (D) $\frac{8}{7}$

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : अच्छी प्रकार से फेटी गयी 52 ताशों की एक गड्डी में से यादृच्छिक (या यदृच्छ) रूप से एक ताश (या कार्ड या पत्ता) चुना जाता है। इस कार्ड के मुख कार्ड (तस्वीर वाला कार्ड) (face card) होने की क्या प्रायिकता है?

(A) $\frac{3}{13}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{6}{13}$ (D) $\frac{9}{13}$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 6 : एक थैले में 3 लाल गेंद, 5 सफेद गेंद और 7 काली गेंद हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस थैले में यादृच्छिक रूप से निकाली गयी एक गेंद न तो लाल होगी और न ही काली?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{8}{15}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 13.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, सूत्र

$$\bar{x} = a + \frac{f_i d_i}{f_i}$$ में d_i निम्नलिखित के a से विचलन है :

(A) वर्गों की निम्न सीमाएँ (B) वर्गों की उपरि सीमाएँ

(C) वर्गों के मध्य - बिंदु (D) वर्ग चिह्नों की बारंबारताएँ

2. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य अभिकलित करते समय, हम यह कल्पना करते हैं कि बारंबारताएँ

(A) सभी वर्गों में समान रूप से वितरित हैं

(B) वर्गों के वर्ग चिह्नों पर केंद्रित हैं

(C) वर्गों की उपरि सीमाओं पर केंद्रित हैं

(D) वर्गों की निम्न सीमाओं पर केंद्रित हैं

3. यदि x_i वर्गीकृत आँकड़ों के वर्ग अंतरालों के मध्य-बिंदु हैं, f_i इनकी संगत बारंबारताएँ हैं तथा $\bar{x}$ माध्य है, तो $\sum(f_i x_i - \bar{x})$ बराबर है

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 2

4. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, सूत्र $\bar{x} = a + h \dfrac{f_i u_i}{f_i}$ में, u_i =

(A) $\dfrac{x_i + a}{h}$ (B) $h\,(x_i - a)$ (C) $\dfrac{x_i - a}{h}$ (D) $\dfrac{a - x_i}{h}$

5. वर्गीकृत आँकड़ों की 'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार' की संचयी बारंबारता वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु के भुज से आंकड़ों का प्राप्त होना है:

(A) माध्य (B) माध्यक (C) बहुलक (D) उपरोक्त सभी तीनों

6. बंटन

वर्ग	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारंबारता	10	15	12	20	9

के लिए, माध्यक वर्ग और बहुलक वर्ग की निम्न सीमाओं का योग है

(A) 15 (B) 25 (C) 30 (D) 35

7. बंटन

वर्ग	0-5	6-11	12-17	18-23	24-29
बारंबारता	13	10	15	8	11

में, माध्यक वर्ग की उपरि सीमा है

(A) 17 (B) 17.5 (C) 18 (D) 18.5

8. बंटन

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	12
30 से कम	27
40 से कम	57
50 से कम	75
60 से कम	80

के लिए, बहुलक वर्ग है

(A) 10-20 (B) 20-30 (C) 30-40 (D) 50-60

9. बंटन

वर्ग	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
बारंबारता	4	5	13	20	14	7	4

के लिए, माध्यक वर्ग की उपरि सीमा और बहुलक वर्ग की निम्न सीमा का अंतर है

(A) 0 (B) 19 (C) 20 (D) 38

10. 150 धावकों द्वारा 110 m की बाधा दौड़ में लिए गये समय (सेकंड में), नीचे सारणीबद्ध किए गए हैं:

वर्ग (समय)	13.8-14	14-14.2	14.2-14.4	14.4-14.6	14.6-14.8	14.8-15
बारंबारता	2	4	5	71	48	20

14.6 सेकंड से कम में दौड़ समाप्त करने वाले धावकों की संख्या है

(A) 11 (B) 71 (C) 82 (D) 130

11. बंटन

प्राप्तांक	**विद्यार्थियों की संख्या**
0 से अधिक या उसके बराबर	63
10 से अधिक या उसके बराबर	58
20 से अधिक या उसके बराबर	55
30 से अधिक या उसके बराबर	51
40 से अधिक या उसके बराबर	48
50 से अधिक या उसके बराबर	42

के लिए, वर्ग 30–40 की बारंबारता है

(A) 3 (B) 4 (C) 48 (D) 51

12. यदि कोई घटना घटित नहीं हो सकती है, तो उसकी प्रायिकता है

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

13. निम्नलिखित में से कौन किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 0.1 (C) 3% (D) $\frac{17}{16}$

14. किसी घटना का घटित होना बहुत कम संभावित है। इसकी प्रायिकता निम्नलिखित के निकटतम है:

(A) 0.0001 (B) 0.001 (C) 0.01 (D) 0.1

15. यदि किसी घटना की प्रायिकता p है, तो इसकी पूरक घटना की प्रायिकता है

(A) $p - 1$ (B) p (C) $1 - p$ (D) $1 - \frac{1}{p}$

16. किसी विशेष घटना के घटित होने की प्रायिकता प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने पर, निम्नलिखित कभी नहीं हो सकती

(A) 100 से कम (B) 0 से कम

(C) 1 से अधिक (D) एक पूर्ण संख्या के अतिरिक्त सभी कुछ

17. यदि P(A), घटना A की प्रायिकता व्यक्त करता है, तो

(A) $P(A) < 0$ (B) $P(A) > 1$ (C) $0 \le P(A) \le 1$ (D) $-1 \le P(A) \le 1$

18. 52 ताशों की एक गड्डी में से एक ताश निकाला जाता है। इसके लाल रंग का मुख कार्ड होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{3}{26}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{1}{2}$

19. इसकी प्रायिकता कि यादृच्छिक रूप से चुने गए एक ऐसे वर्ष में, जो अधिवर्ष (leap year) न हो 53 रविवार हों, निम्नलिखित है :

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

20. जब एक पासे को फेंका जाता है, तो 3 से छोटी एक विषम संख्या आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

21. 52 ताशों की एक गड्डी में से एक कार्ड निकाला जाता है। कार्ड का ईंट का इक्का न होना घटना E है। E के अनुकूल परिणामों की संख्या है

(A) 4 (B) 13 (C) 48 (D) 51

22. 400 अंडों के एक संग्रह में से एक खराब अंडा प्राप्त करने की प्रायिकता 0.035 है। इस संग्रह में खराब अंडों की संख्या है

(A) 7 (B) 14 (C) 21 (D) 28

23. कोई लड़की यह परिकलित करती है कि उसके द्वारा एक लॉटरी में प्रथम पुरस्कार जीतने की प्रायिकता 0.08 है। यदि 6000 टिकट बेचे गये हैं, तो उस लड़की ने कितने टिकट खरीदे हैं?

(A) 40 (B) 240 (C) 480 (D) 750

24. किसी थैले में कुछ टिकट हैं, जिन पर 1 से 40 तक संख्याएँ अंकित हैं। इसमें से यादृच्छिक रूप से एक टिकट निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता कि निकाले गये इस टिकट की संख्या 5 का एक गुणज हो, निम्नलिखित है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

25. किसी व्यक्ति से 1 से 100 तक की संख्याओं में से एक संख्या चुनने को कहा जाता है। इस संख्या के अभाज्य संख्या होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

26. किसी स्कूल में पाँच सदन A, B, C, D और E हैं। किसी कक्षा में 23 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 4 सदन A से, 8 सदन B से, 5 सदन C से, 2 सदन D से तथा शेष सदन E से हैं। इनमें से एक विद्यार्थी को कक्षा का मॉनीटर बनाने के लिए चुना जाता है। चुने गये इस विद्यार्थी के सदनों A, B और C से न होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{4}{23}$ (B) $\frac{6}{23}$ (C) $\frac{8}{23}$ (D) $\frac{17}{23}$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य तथा इन आँकड़ों को वर्गीकृत करने के बाद परिकलित किया गया माध्य सदैव बराबर होते हैं। क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : यह कथन सत्य नहीं है। इसका कारण यह है कि जब हम वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य परिकलित करते हैं, तो हम कल्पना करते हैं कि प्रत्येक वर्ग की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित है। इसी कल्पना के कारण, अवर्गीकृत और वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य एक ही होने की संभावना बहुत ही कम है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : क्या यह कहना सही है कि एक तोरण एक बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण है? कारण दीजिए।

हल : किसी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण एक तोरण हो सकता है और नहीं भी हो सकता है। यह एक आयतचित्र भी हो सकता है। तोरण एक संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण होता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी स्थिति में, जब केवल दो संभव परिणाम हों, प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होगी। सत्य है या असत्य? क्यों?

हल : असत्य। प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ तभी होगी जबकि दोनों परिणाम समप्रायिक हों, अन्यथा नहीं।

प्रश्नावली 13.2

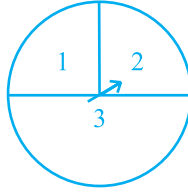
1. अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक और इन्हीं आँकड़ों को वर्गीकृत करने के बाद परिकलित माध्यक सदैव बराबर होते हैं। क्या आप सोचते हैं कि यह कथन सत्य है? कारण दीजिए।

2. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य परिकलित करने के लिए, हम सूत्र $\overline{x} = a + \frac{f_i d_i}{f_i}$ का प्रयोग कर सकते है, जब सभी वर्गों की वर्गमाप बराबर हैं, a कल्पित माध्य है तथा a को वर्गों के मध्य-बिंदुओं में से कोई एक होना चाहिए। क्या अंतिम कथन सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

3. क्या यह कहना सत्य है कि दिये हुए वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक सदैव भिन्न-भिन्न होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. क्या दिये हुए वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्यक वर्ग और बहुलक वर्ग सदैव भिन्न-भिन्न होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. तीन बच्चों वाले एक परिवार में, हो सकता है कोई लड़की न हो, एक लड़की हो, दो लड़कियाँ हों या तीन लड़कियाँ हों। अतः, इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

6. किसी खेल में एक तीर को घुमाया जाता है, जो घूमने के बाद, 1, 2 या 3 क्षेत्रों में से किसी एक की ओर इंगित करता हुआ स्थिर हो जाता है (देखिए आकृति 13.1)। क्या परिणाम 1, 2 और 3 आना समप्रायिक है? कारण दीजिए।

आकृति 13.1

7. अपूर्व दो पासों को फेंकता है तथा इन पासों पर आने वाली संख्याओं का गुणनफल परिकलित करता है। पीहू एक पासे को फेंकती है तथा उस पर आयी संख्या का वर्ग कर देती है। संख्या 36 प्राप्त करने का किसका अधिक अच्छा संयोग है और क्यों?

8. जब हम किसी सिक्के को उछालते हैं, तो दो संभव परिणाम हैं– चित या पट। अत:, इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

9. एक विद्यार्थी कहता है कि यदि आप एक पासे को फेंकेंगे, तो यह या तो 1 दर्शाएगा या 1 नहीं दर्शाएगा। इसलिए, 1 प्राप्त करने और 1 नहीं प्राप्त करने में से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। क्या यह सही है? कारण दीजिए।

10. मैं तीन सिक्कों को एक साथ उछालता हूँ। संभव परिणाम कोई चित नहीं, 1 चित, 2 चित या 3 चित हैं। अत:, मैं कहता हूँ कि कोई चित प्राप्त न करने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इस निष्कर्ष में क्या गलती है?

11. यदि आप किसी सिक्के को 6 बार उछालते हैं और प्रत्येक बार चित आता है तो क्या आप कह सकते हैं कि चित के प्राप्त करने की सैद्धांतिक प्रायिकता 1 है? कारण दीजिए।

12. सुषमा एक सिक्के को तीन बार उछालती है और उसे प्रत्येक बार एक पट प्राप्त होता है। क्या आप सोचते हैं कि अगली उछाल में भी उसे पट प्राप्त होगा? कारण दीजिए।

13. यदि मुझे एक सिक्के को तीन बार उछालने पर प्रत्येक बार चित प्राप्त होता है, क्या चौथी उछाल में मुझे यह आशा रखनी चाहिए कि पट आने का अधिक अच्छा संयोग है?

14. एक थैले में 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखी हुई पर्चियाँ रखी हैं। यदि इसमें से फातिमा एक पर्ची यादृच्छिक रूप से चुनती है, तो या तो यह एक विषम संख्या होगी या एक सम संख्या होगी। क्योंकि इस स्थिति में, केवल दो ही संभव परिणाम हैं, इसलिए इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। औचित्य दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित बंटन के लिए संचयी बारंबारता बंटन की रचना कीजिए :

वर्ग	12.5-17.5	17.5-22.5	22.5-27.5	27.5-32.5	32.5-37.5
बारंबारता	2	22	19	14	13

हल : दिये हुए बंटन का वाँछित संचयी बारंबारता बंटन नीचे दिया गया है :

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
12.5-17.5	2	2
17.5-22.5	22	24
22.5-27.5	19	43
27.5-32.5	14	57
32.5-37.5	13	70

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : किसी सर्वे से प्राप्त 110 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी को नीचे सारणीबद्ध किया गया है :

दैनिक मजदूरी (रु में)	श्रमिकों की संख्या
100-120	10
120-140	15
140-160	20
160-180	22
180-200	18
200-220	12
220-240	13

इन श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी परिकलित कीजिए।

हल : हम पहले प्रत्येक वर्ग का वर्ग चिह्न x_i ज्ञात करते हैं और नीचे दर्शाए अनुसार आगे बढ़ते हैं :

दैनिक मजदूरी (रु में) वर्ग	वर्ग चिह्न (x_i)	श्रमिकों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
100-120	110	10	1100
120-140	130	15	1950
140-160	150	20	3000
160-180	170	22	3740
180-200	190	18	3420
200-220	210	12	2520
220-240	230	13	2990

$f_i = 110,$ $f_i x_i = 18720$

अत:, माध्य $= \overline{x} = \dfrac{f_i x_i}{f_i} = \dfrac{18720}{110} = 170.20$

इसलिए, श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी 170.20 रु है।

टिप्पणी: उपरोक्त माध्य दैनिक मजदूरी, कल्पित माध्य विधि या पग विचलन विधि से भी परिकलित की जा सकती है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये गये अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है

प्राप्तांक	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
बारंबारता	14	16	18	23	18	8	3

माध्यक प्रतिशत अंक निर्धारित कीजिए।

हल :

प्राप्तांक (वर्ग)	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता
30-35	14	14
35-40	16	30
40-45	18	48
45-50	23	71 ← माध्यक वर्ग
50-55	18	89
55-60	8	97
60-65	3	100

यहाँ, $n = 100$ है।

अतः, $\frac{n}{2} = 50$ है यह प्रेक्षण वर्ग 45–50 में स्थित है।

l (माध्यक वर्ग की निम्न सीमा) $= 45$

cf (माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता) $= 48$

f (माध्यक वर्ग की बारंबारता) $= 23$

h (वर्ग माप) $= 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right)h$$

$$= 45 + \left(\frac{50-48}{23}\right) \times 5$$

$$= 45 + \frac{10}{23} = 45.4$$

अतः, प्राप्तांकों का माध्यक प्रतिशत 45.4 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : किसी गाँव में कृषि योग्य भूमि – स्वामियों की बारंबारता बंटन सारणी नीचे दी गयी है:

भूमि का क्षेत्रफल (हेक्टेयर में)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
परिवारों की संख्या	20	45	80	55	40	12

इस गाँव का बहुलक भूमि-स्वामित्व ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, अधिकतम बारंबारता 80 है तथा इस बारंबारता के संगत वर्ग 5–7 है।

अत:, बहुलक वर्ग 5–7 है।

l (बहुलक वर्ग की निम्न सीमा) $= 5$

f_1 (बहुलक वर्ग की बारंबारता) $= 80$

f_0 (बहुलक वर्ग के ठीक पहले के वर्ग की बारंबारता) $= 45$

f_2 (बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारंबारता) $= 55$

h (वर्ग माप) $= 2$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$= 5 + \frac{80 - 45}{2(80) - 45 - 55} \times 2$$

$$= 5 + \frac{35}{60} \times 2 = 5 + \frac{35}{30}$$

$$= 5 + 1.2 = 6.2$$

अत:, इस गाँव का बहुलक भूमि-स्वामित्व 6.2 हेक्टेयर है।

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-10
बारंबारता	9	22	27	17

2. एक गणित टेस्ट में 20 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	7	6	1

3. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य परिकलित कीजिए :

वर्ग	4 – 7	8 –11	12– 15	16 –19
बारंबारता	5	4	9	10

4. निम्नलिखित सारणी, सारिका द्वारा स्वयं अपनी पुस्तक को पूर्ण करने के लिए 30 दिन तक लिखे गये पृष्ठों को दर्शाती है :

प्रतिदिन लिखे पृष्ठों की संख्या	16-18	19-21	22-24	25-27	28-30
दिनों की संख्या	1	3	4	9	13

प्रतिदिन लिखे गये माध्य पृष्ठों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. 50 कर्मचारियों के एक प्रतिदर्श की दैनिक आय निम्नलिखित रूप में सारणीबद्ध है :

आय (रु में)	1-200	201-400	401-600	601-800
कर्मचारियों की संख्या	14	15	14	7

कर्मचारियों की माध्य दैनिक आय ज्ञात कीजिए।

6. किसी एयरक्राफ्ट में यात्रियों के लिए 120 सीटें हैं। 100 उड़ानों के दौरान प्रयोग की गयी सीटों की संख्याएं निम्नलिखित सारणी में दी हुई हैं :

सीटों की संख्या	100-104	104-108	108-112	112-116	116-120
बारंबारता	15	20	32	18	15

इन उड़ानों में प्रयोग की गयी सीटों की संख्या का माध्य निर्धारित कीजिए।

7. 50 पहलवानों के भार (kg में) नीचे सारणी में दिये हैं:

भार (kg में)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
पहलवानों की संख्या	4	14	21	8	3

इन पहलवानों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

8. किसी कार निर्माता द्वारा एक ही मॉडल की 50 कारों की माइलेज़ (अर्थात एक लीटर ईंधन में कितने km चलती हैं) की जाँच की, जिसके परिणाम नीचे सारणीबद्ध हैं:

माइलेज (km/L)	10-12	12-14	14-16	16-18
कारों की संख्या	7	12	18	13

माध्य माइलेज ज्ञात कीजिए।

निर्माता यह दावा करता है कि इस मॉडल की माइलेज 16 km/L है। क्या आप इस दावे से सहमत हैं?

9. 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बंटन निम्नलिखित है:

भार (kg में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
व्यक्तियों की संख्या	4	4	13	5	6	5	2	1

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' की एक संचयी बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

10. निम्नलिखित सारणी किसी परीक्षा में 800 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के संचयी बारंबारता बंटन को दर्शाती है :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	10
20 से कम	50
30 से कम	130
40 से कम	270
50 से कम	440
60 से कम	570
70 से कम	670
80 से कम	740
90 से कम	780
100 से कम	800

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, एक बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

11. निम्नलिखित आँकड़ों से एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

प्राप्तांक (90 में से)	प्रत्याशियों की संख्या
80 से अधिक या उसके बराबर	4
70 से अधिक या उसके बराबर	6
60 से अधिक या उसके बराबर	11
50 से अधिक या उसके बराबर	17
40 से अधिक या उसके बराबर	23
30 से अधिक या उसके बराबर	27
20 से अधिक या उसके बराबर	30
10 से अधिक या उसके बराबर	32
0 से अधिक या उसके बराबर	34

12. किसी कक्षा के विद्यार्थियों की ऊँचाइयों (लंबाइयों) के निम्नलिखित बंटन में अज्ञात प्रविष्टियाँ a, b, c, d, e और f ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (cm में)	बारंबारता	संचयी बारंबारता
150-155	12	a
155-160	b	25
160-165	10	c
165-170	d	43
170-175	e	48
175-180	2	f
कुल	**50**	

13. एक विशिष्ट दिन किसी अस्पताल में इलाज करा रहे 300 रोगियों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित हैं :

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
रोगियों की संख्या	60	42	55	70	53	20

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, निम्नलिखित को बनाइए:

(i) 'से कम प्रकार' का संचयी बारंबारता बंटन

(ii) 'से अधिक प्रकार' का संचयी बारंबारता बंटन

14. नीचे किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का एक संचयी बारंबारता बंटन दर्शाया गया है :

प्राप्तांक	20 से कम	40 से कम	60 से कम	80 से कम	100 से कम
विद्यार्थियों की संख्या	17	22	29	37	50

उपरोक्त के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

15. 600 परिवारों की साप्ताहिक आय नीचे सारणीबद्ध है :

साप्ताहिक आय (रु में)	परिवारों की संख्या
0-1000	250
1000-2000	190
2000-3000	100
3000-4000	40
4000-5000	15
5000-6000	5
कुल	**600**

माध्यक आय अभिकलित कीजिए।

16. किसी क्रिकेट कोचिंग केंद्र पर 33 खिलाड़ियों की गेंदबाजी करने की अधिकतम चालें (km प्रति घंटा में) इस प्रकार है:

चाल (km/h)	85-100	100-115	115-130	130-145
खिलाड़ियों की संख्या	11	9	8	5

गेंदबाजी की माध्यक चाल परिकलित कीजिए।

17. 100 परिवारों की मासिक आय नीचे दी हुई हैं:

आय (रु में)	परिवारों की संख्या
0-5000	8
5000-10000	26
10000-15000	41
15000-20000	16
20000-25000	3
25000-30000	3
30000-35000	2
35000-40000	1

बहुलक आय परिकलित कीजिए।

18. 70 पैकेटों में, कॉफी का भार निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है :

भार (g में)	पैकेटों की संख्या
200-201	12
201-202	26
202-203	20
203-204	9
204-205	2
205-206	1

बहुलक भार निर्धारित कीजिए।

19. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। निम्नलिखित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) दोनों पासों पर एक ही संख्या।

(ii) दोनों पासों पर भिन्न-भिन्न संख्याएँ।

20. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का योग

(i) 7 हो? (ii) एक अभाज्य संख्या हो? (iii) 1 हो?

21. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासों पर आयी संख्याओं का गुणनफल

(i) 6 है। (ii) 12 है। (iii) 7 है।

22. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का गुणनफल लिख लिया जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गुणनफल 9 से कम है।

23. दो पासों पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5, 6 और 1, 1, 2, 2, 3, 3 संख्याएँ लिखी हुई हैं। इनको एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का योग लिख लिया जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अलग-अलग प्रत्येक योग 2 से 9 तक हो।

24. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। अधिकतम एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। संभव परिणामों की एक सूची बनाइए। निम्नलिखित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) सभी चित (ii) न्यूनतम 2 चित

26. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का अंतर 2 है।

27. किसी थैले में 10 लाल, 5 नीली और 7 हरी गेंद हैं। इसमें से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद

(i) लाल है (ii) हरी है (iii) नीली नहीं है

28. 52 ताशों की एक गड्डी में से, चिड़ी के बादशाह, बेगम और गुलाम को हटा दिया जाता है तथा शेष कार्डों को अच्छी तरह से फेट लिया जाता है। इसके बाद, शेष कार्डों में से एक कार्ड यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। कार्ड के निम्नलिखित होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए:

(i) एक पान (ii) एक बादशाह

29. प्रश्न 28 का संदर्भ लीजिए। इसकी क्या प्रायिकता है कि कार्ड

(i) एक चिड़ी का कार्ड है? (ii) पान का 10 (दहला) है?

30. 52 ताशों की एक गड्डी में सभी गुलाम, बेगम और बादशाह हटा दिये जाते हैं। शेष कार्डों को अच्छी प्रकार से फेट लिया जाता है। इसके बाद, इसमें से एक कार्ड यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इक्के को मान 1 देकर, अन्य कार्डों को भी इसी प्रकार के मान दिये जाते हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड का मान है:

(i) 7 (ii) 7 से अधिक (iii) 7 से कम

31. 0 और 100 के बीच एक पूर्णांक चुना जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह

(i) 7 से विभाज्य है? (ii) 7 से विभाज्य नहीं है?

32. कार्ड जिन पर 2 से 101 तक की संख्याएँ लिखी हुई हैं एक बक्स में रख दिये जाते हैं। एक कार्ड यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस कार्ड पर एक

(i) सम संख्या हो (ii) वर्ग संख्या हो

33. अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि यह अक्षर एक व्यंजक है।

34. किसी बक्से में 1000 सील किये हुए लिफाफे हैं। इनमें से 10 ऐसे लिफाफे हैं, जिनमें से प्रत्येक में 100 रु का एक नकद पुरस्कार है, 100 में से प्रत्येक में 50 रु का एक नकद पुरस्कार है और 200 में से प्रत्येक में 10 रु का एक नकद पुरस्कार है तथा शेष में कोई नकद पुरस्कार नहीं है। इनको अच्छी प्रकार से मिलाकर, एक लिफाफा बाहर निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस लिफाफे में कोई नकद पुरस्कार न हो।

35. पेटी A में 25 पर्चियाँ हैं, जिनमें से 19 पर 1 रु अंकित है और शेष पर 5 रु अंकित है। पेटी B में 50 पर्चियाँ हैं, जिनमें से 45 पर 1 रु अंकित है और शेष पर 13 रु अंकित है। दोनों पेटियों की पर्चियों को एक स्थान पर एकत्रित करके एक तीसरी पेटी में रख दिया जाता है और इन्हें अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। इस पेटी में से यादृच्छिक रूप से एक पर्ची निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस पर्ची पर 1 रु के अतिरिक्त कुछ और अंकित होगा?

36. 24 बल्ब वाले एक डिब्बे में 6 खराब बल्ब हैं। इसमें से एक बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा? यदि चुना हुआ बल्ब खराब है और इसे प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है तथा शेष बल्बों में से एक अन्य बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि यह दूसरा बल्ब खराब होगा?

37. बच्चों के एक खेल में, 8 त्रिभुज हैं, जिसमें से 3 नीले और शेष लाल हैं। साथ ही, इस खेल में 10 वर्ग हैं जिसमें से 6 नीले हैं और शेष लाल हैं। इनमें से एक टुकड़ा यादृच्छिक रूप से खो जाता है। इस टुकड़े के निम्नलिखित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) त्रिभुज (ii) वर्ग (iii) नीले रंग का वर्ग

(iv) लाल रंग का त्रिभुज

38. एक खेल में प्रवेश शुल्क 5 रु है। इस खेल में एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। यदि एक या दो चित आते हैं, तो श्वेता को अपना प्रवेश शुल्क वापस मिल जाता है। यदि वह तीन चित प्राप्त करे, तो उसको अपने प्रवेश शुल्क का दुगुना प्राप्त होता है, अन्यथा वह प्रवेश शुल्क की राशि हार जाती है। एक सिक्के को तीन बार फेंकने पर, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह

(i) अपना प्रवेश शुल्क हार जाएगी।

(ii) प्रवेश शुल्क का दुगुना प्राप्त करेगी।

(iii) केवल अपना प्रवेश शुल्क वापस प्राप्त करेगी।

39. एक पासे के छः फलकों पर 0, 1, 1, 1, 6, 6 अंकित हैं। ऐसे दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का योग लिख लिया जाता है।

(i) कितने विभिन्न परिणाम संभव हैं?

(ii) योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

40. एक समूह में 48 मोबाइल फोन हैं, जिसमें से 42 अच्छे हैं, 3 में थोड़ी सी खराबी है तथा 3 में बड़ी खराबी है। वर्निका एक मोबाइल फोन तभी खरीदेगी जब वह अच्छा हो, परंतु व्यापारी केवल तभी मोबाइल खरीदेगा, यदि इसमें कोई बड़ी खराबी न हो। इस समूह में से एक फोन यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता क्या है कि यह फोन

(i) वर्निका को स्वीकार होगा?

(ii) व्यापारी को स्वीकार होगा?

41. एक थैले में 24 गेंद हैं, जिसमें से x लाल, $2x$ सफेद और $3x$ नीली हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गेंद

(i) लाल नहीं हो? (ii) सफेद हो?

42. किसी मेले में, एक पेटी में 1000 कुछ कार्ड रख दिये जाते हैं। जिन पर 1 से 1000 तक संख्याएँ इस प्रकार अंकित हैं कि एक कार्ड पर एक ही संख्या अंकित है। प्रत्येक खिलाड़ी इसमें से यादृच्छिक रूप से एक कार्ड निकालता है तथा कार्ड को प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है। यदि चुने हुए कार्ड पर 500 से बड़ा एक पूर्ण वर्ग आ जाये, तो उस खिलाड़ी को एक पुरस्कार दिया जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) पहले खिलाड़ी को पुरस्कार प्राप्त होगा?

(ii) दूसरे खिलाड़ी को पुरस्कार प्राप्त होगा, यदि पहले को पुरस्कार प्राप्त हो चुका है?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: 1000 व्यक्तियों, जिनमें से प्रत्येक की आयु 20 वर्ष या उससे अधिक है, का संचयी बारंबारता बंटन (से कम प्रकार का) नीचे दिया गया है:

से कम आयु (वर्षों में)	30	40	50	60	70	80
व्यक्तियों की संख्या	100	220	350	750	950	1000

माध्य आयु निर्धारित कीजिए।

हल : पहले हम दिये हुए आँकड़ों का बारंबारता बंटन बनाते हैं और फिर माध्य परिकलित करने के लिए, वर्ग चिह्न (x_i), u_i और f_iu_i अभिकलित करते हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

वर्ग	बारंबारता (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	f_iu_i
20-30	100	25	–2	–200
30-40	120	35	–1	–120
40-50	130	45	0	0
50-60	400	55	1	400
60-70	200	65	2	400
70-80	50	75	3	150
	$f_i = 1000$			$f_iu_i = 630$

यहाँ हमने कल्पित माध्य $(a) = 45$ लिया है। यहाँ, $h =$ वर्ग माप (साइज) $= 10$ है।
सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{माध्य} = \bar{x} = a + h \frac{f_i u_i}{f_i}$$

$$= 45 + 10 \frac{630}{1000}$$

$$= 45 + 6.3 = 51.3$$

इस प्रकार माध्य आयु 51.3 वर्ष है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित बंटन का माध्य 18 है। वर्ग अंतराल 19–21 में बारंबारता f लुप्त है। f निर्धारित कीजिए।

वर्ग अंतराल	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बारंबारता	3	6	9	13	f	5	4

हल :

वर्ग अंतराल	**मध्य-बिंदु** (x_i)	**बारंबारता** (f_i)	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i u_i$
11-13	12	3	–3	–9
13-15	14	6	–2	–12
15-17	16	9	–1	–9
17-19	18	13	0	0
19-21	20	f	1	f
21-23	22	5	2	10
23-25	24	4	3	12
		$f_i = 40 + f$		$f_i u_i = f - 8$

आइए कल्पित माध्य $(a) = 18$ लें। यहाँ $h = 2$ है।

$$\text{अतः, माध्य} = \bar{x} = a + h \frac{f_i u_i}{f_i}$$

$$= 18 + 2\ \frac{f - 8}{40 + f}$$

परंतु $\bar{x} = 18$ (दिया है)

अतः, $$18 = 18 + \frac{2(f - 8)}{40 + f}$$

या $f = 8$

अतः, वर्ग अंतराल 19 – 21 की बारंबारता 8 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : नीचे दिये हुए बंटन का माध्यक 14.4 है। x और y के मान ज्ञात कीजिए, यदि कुल बारंबारता 20 है:

वर्ग अंतराल	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारंबारता	4	x	5	y	1

हल :

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-6	4	4
6-12	x	$4 + x$
12-18	5	$9 + x$
18-24	y	$9 + x + y$
24-30	1	$10 + x + y$

यह दिया है कि $n = 20$ है।

अतः, $10 + x + y = 20$, अर्थात्, $x + y = 10$ ...(1)

यह भी दिया हुआ है कि माध्यक = 14.4 है, जो

वर्ग अंतराल 12–18 में स्थित है।

अत:, $l = 12,\ f = 5,\ \text{cf} = 4 + x,\ h = 6$

माध्यक $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) h$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$14.4 = 12 + \frac{10 - (4 + x)}{5} \times 6$$

या $x = 4$ ...(2)

अब, (1) और (2) से, हमें $y = 6$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 13.4

1. निम्नलिखित बंटन के लिए, माध्य प्राप्तांक ज्ञात कीजिए:

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 और उससे अधिक	80
10 और उससे अधिक	77
20 और उससे अधिक	72
30 और उससे अधिक	65
40 और उससे अधिक	55
50 और उससे अधिक	43
60 और उससे अधिक	28
70 और उससे अधिक	16
80 और उससे अधिक	10
90 और उससे अधिक	8
100 और उससे अधिक	0

2. निम्नलिखित बंटन का माध्य निर्धारित कीजिए:

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5
20 से कम	9
30 से कम	17
40 से कम	29
50 से कम	45
60 से कम	60
70 से कम	70
80 से कम	78
90 से कम	83
100 से कम	85

3. निम्नलिखित आँकड़ों से एक शहर के 100 निवासियों की माध्य आयु ज्ञात कीजिए:

आयु बराबर और उससे अधिक (वर्षों में)	0	10	20	30	40	50	60	70
व्यक्तियों की संख्या	100	90	75	50	25	15	5	0

4. 70 पैकेटों में चाय के भार नीचे दी सारणी में दर्शाए गये हैं:

भार (ग्राम में)	पैकेटों की संख्या
200-201	13
201-202	27
202-203	18
203-204	10
204-205	1
205-206	1

इन पैकेटों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

5. उपरोक्त प्रश्न 4 का संदर्भ लीजिए। इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' का तोरण खींचिए तथा इसका प्रयोग माध्यक भार ज्ञात करने में कीजिए।

6. उपरोक्त प्रश्न 4 का संदर्भ लीजिए। इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार' के तोरण खींचिए तथा इनका माध्यक भार ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए।

7. नीचे दी सारणी 280 व्यक्तियों के वेतन दर्शाती है:

वेतन (हजार रुपयों में)	**व्यक्तियों की संख्या**
5-10	49
10-15	133
15-20	63
20-25	15
25-30	6
30-35	7
35-40	4
40-45	2
45-50	1

इन आँकड़ों का माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य 50 है, परंतु 20 – 40 और 60 – 80 वर्गों की बारंबारताएँ क्रमश: f_1 और f_2 ज्ञात नहीं हैं। ये बारंबारताएँ ज्ञात कीजिए, यदि सभी बारंबारताओं का योग 120 है।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारंबारता	17	f_1	32	f_2	19

9. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 50 है। यदि सभी बारंबारताओं का योग 90 है, तो p और q के मान ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	**बारंबारता**
20-30	p
30-40	15
40-50	25
50-60	20
60-70	q
70-80	8
80-90	10

10. 96 बच्चों की लंबाइयों (ऊँचाइयों) (cm में) का बंटन नीचे दिया गया है:

लंबाई (cm में)	**बच्चों की संख्या**
124-128	5
128-132	8
132-136	17
136-140	24
140-144	16
144-148	12
148-152	6
152-156	4
156-160	3
160-164	1

इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' की संचयी बारंबारता वक्र खींचिए और इसका बच्चों की माध्यक लंबाई ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए।

11. एक सर्वे के द्वारा 200 परिवारों के कृषि योग्य भूमि – स्वामित्व साइज नीचे सारणी में दिये हैं :

कृषि योग्य भूमि स्वामित्व का साइज (ha में)	**परिवारों की संख्या**
0-5	10
5-10	15
10-15	30
15-20	80
20-25	40
25-30	20
30-35	5

इन भूमि–स्वामित्वों के माध्यक और बहुलक साइज ज्ञात कीजिए।

12. किसी शहर में एक वर्ष के 66 दिन की वर्षा का रिकार्ड नीचे सारणी में दिया गया है :

वर्षा (cm में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
दिनों की संख्या	22	10	8	15	5	6

'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार के' तोरणों का प्रयोग करके माध्यक वर्षा परिकलित कीजिए।

13. किसी मोबाइल फोन पर किये गये कॉलों के समय-काल का बारंबारता बंटन नीचे दिया गया है:

समय काल (सेकंडों में)	**कॉलों की संख्या**
95-125	14
125-155	22
155-185	28
185-215	21
215-245	15

इन कॉलों का औसत समय काल (सेकंडों में) परिकलित कीजिए तथा साथ ही संचयी बारंबारता वक्र से माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

14. एक स्कूल के 50 विद्यार्थियों ने भाला फेंक प्रतियोगिता में भाग लिया। फेंकी गयी दूरियाँ (मीटर में) नीचे दी गई हैं:

दूरी (m में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	6	11	17	12	4

(i) एक संचयी बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

(ii) 'से कम प्रकार की' एक संचयी बारंबारता वक्र खींचिए और इससे फेंकी गयी माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) माध्यक के सूत्र का प्रयोग करते हुए, माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।

(iv) क्या ऊपर (ii) और (iii) में प्राप्त किये गये माध्यक बराबर हैं?